Teoría de Juegos en la Fórmula 1

Luis Contreras Moreno

Seminario sobre Métodos Matemáticos y Algoritmos

Departamento de Matemáticas
CINVESTAV - IPN
28 de Febrero del 2024

Introducción

- La Fórmula 1 es la principal competición de deportes de motor.
- Cada carrera implica un alto nivel de estrategia.

Formato de carrera

Cada gran premio se divide en:

- Práctica 1
- Práctica 2
- Práctica 3
- Clasificaciones (Q_1, Q_2, Q_3)
- Carrera

Neumáticos y Movimientos

Neumáticos:	Movimientos:
Suaves (S)	Undercut
Medios (M)	Overcut
Duros (D)	Overtake
Lluvia	

DEF.- *Un juego estratégico (o en forma normal) es una terna*

$$G = (I, \{A_i, i \in I\}, \{v_i, i \in I\})$$

donde $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *es el conjunto de jugadores y para cada* $i \in I$*:*

- A_i *es el conjunto de acciones (o estrategias puras) del jugador* i*.*
- $v_i : A_1 \times \ldots A_n \to \mathbb{R}$ *es la función de pago del jugador* i*.*

DEF.- *Sea* $G = (\{1,2\}, \{A, B\}, \{v_1, v_2\})$ *un juego en forma normal, decimos que* G *es un* **juego de suma cero** *si:*

$$v_1((a,b)) + v_2((a,b)) = 0, \forall (a,b) \in A \times B$$

DEF.- *Sea* $G = (I, \{A_i, i \in I\}, \{v_i, i \in I\})$ *un juego en forma normal, decimos que* $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*) \in A_1 \times \ldots \times A_n$ *es un* **equilibrio de Nash (EN) para** G *si, para cada jugador* i, a_i^* *es la mejor respuesta del jugador* i *(o almenos una de ellas) a las estrategias de los otros* $n-1$ *jugadores* $(a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, \ldots, a_n^*)$, *i.e,*

$$v_i((a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_i^* a_{i+1}^*, \ldots, a_n^*)) \geq v_i((a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \ldots, a_n^*)),$$

$\forall a_i \in A_i$; *dicho de otro modo,* a_i^* *es solución a la ecuación*

$$\max_{a_i \in A_i} v_i((a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \ldots, a_n^*))$$

TEOREMA.- *Sea* $G = (\{1,2\}, \{A,B\}, \{v_1, v_2\})$ *un juego de suma cero, y sea* $v(a,b) = v_1(a,b) = -v_2(a,b)$*. Entonces* (a^*, b^*) *es un equilibrio de Nash ssi* (a^*, b^*) *es un punto silla, i.e,*

$$v(a, b^*) \leq v(a^*, b^*) \leq v(a^*, b), \qquad \forall (a,b) \in A \times B$$

Consideraciones

- Configuración de la pista:

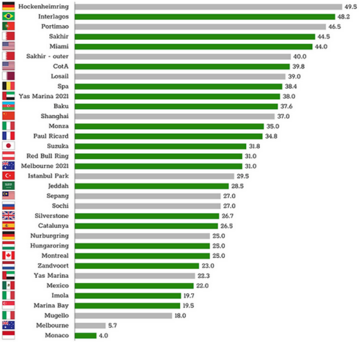


Figura: Promedio de overtakes por circuito en la F1, de la temporada 2017 a la temporada 2022 (en verde los circuitos corridos en 2022).

Consideraciones

- Tiempo y neumático privilegiado.
- Degradación de los neumáticos. (*)
- Reglamentación oficial.
- Racionalidad de los participantes.

Definición del juego.

Formalmente tenemos:

$$G = (\{1,2\}, A, \{u_1, u_2\})$$

Donde

$$A = A_1 \times A_2$$

Con

$$A_i = B \times C, i = 1,2$$

y

$B = \{SD, DS, SM, MS, MD, DM\}$
$C = \{1, \ldots, T-1\}, \ T = \text{Total de vueltas del circuito}$

$$v_i = \begin{cases} -\,|f_i - f_j| & \text{si } f_i > f_j \\ |f_i - f_j| & \text{si } f_j > f_i \\ 0 & \text{si } f_i = f_j \end{cases} \quad \text{,i=1,2}$$

Con $f_k, \ k = 1,2$ como se definen a continuación.

Funciones de pago

Para el jugador k, $k = 1, 2$, definimos su **función "contadora"** $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ como

$$f_k((**, *)) = \beta + \Psi\theta + (N - \Psi)\alpha + \rho\delta + (T - (N + \rho))\gamma + \epsilon$$

Donde:

- Tomamos como tiempo "privilegiado" al tiempo que le toma dar una vuelta con los neumaticos "más" rápidos nuevos al coche con mejor rendimiento.
- β:= Tiempo en pits.
- $\theta := \begin{cases} 0 & \text{si el primer compuesto elegido es el "privilegiado."} \\ \eta & \text{c.c.} \end{cases}$
- η:= Perdida por vuelta con respecto al neumatico "privilegiado"
- N:= Vuelta de entrada en pits.
- Ψ:= Vuelta a partir de la cual se comienza a desgastar el primer compuesto elegido.
- α:= Factor de desgaste del primer compuesto elegido.

- ρ:= $\begin{cases} 0 \text{ si el segundo compuesto elegido es el ``privilegiado''} \\ \varphi \text{ c.c} \end{cases}$

- φ:= Vuelta a partir de la cual se empieza a degradar el segundo neumatico.

- δ:= $\begin{cases} 0 \text{ si el segundo compuesto elegido es el ``privilegiado''} \\ \eta \text{ c.c} \end{cases}$

- γ:= Factor de desgaste del segundo compuesto elegido.

- T:= Total de vueltas

- ϵ:= $\begin{cases} 0 \text{ si `` } k \text{ '' arranca en primera posición.} \\ 0.3 \text{ si `` } k \text{ '' arranca en segunda posición.} \end{cases}$

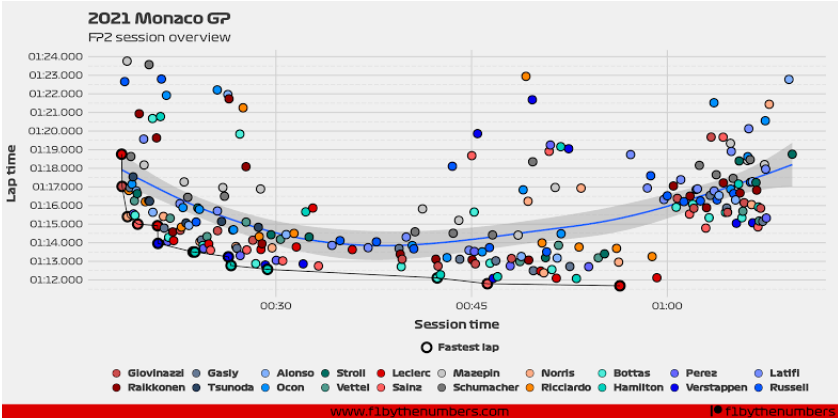
Observaciones:

1.- Sin perdida de generalidad para tener bien definido a η podemos considerar que el neumático “privilegiado” pierde 0 seg. por vuelta con respecto a el mismo.

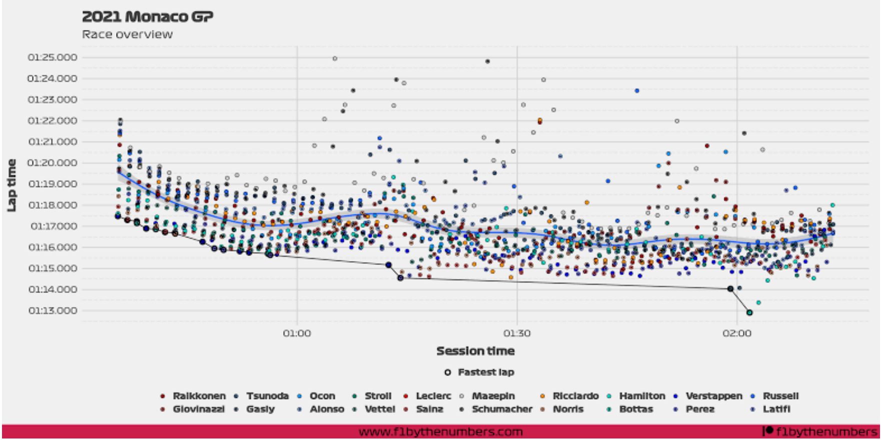
2.- $N(T, \varphi, \Psi)$, es decir, N depende del total de vueltas del circuito y de la eleccion de neumáticos, de hecho de la definicion tenemos que N debe satisfacer $N < T - \rho$

3.- Cada uno de los parámetros anteriores depende del auto y del piloto.

Recolección de datos



Recolección de datos



Ejemplo
Circuito: **Mónaco**

$T = 78$

$\beta = 25$ segs.

Neumaticos sugeridos: Suave y duro.

Suponiendo que ambos coches tienen el mismo nivel competitivo :

Neumatico suave:

- **10** vueltas para comenzar a desgastarse.
- **A partir de la decima vuelta se pierde** 1 **seg. por vuelta**.
- **Uso recomendado** de 20 a 30 vueltas.

Neumatico duro:

- **Uso recomendado** de 30 a 60 vueltas.
- **20** vueltas para comenzar a desgastarse.
- En buen estado **0.7** segundos más lento por vuelta con respecto al neumatico suave.
- En estado deteriorado **1.4** segundos más lento por vuelta con respecto al neumatico suave.

Bajo las condiciones anteriores un jugador **"racional"** toma

$$20 \leq N \leq 60$$

Por simplicidad tomaremos $n \in \{20, 30, 50, 60\}$

Suponiendo que el jugador 1 **arranca primero**, se tiene:

$$f_1 = 25 + \Psi\theta + (n - \Psi)\alpha + \rho\delta + (T - (n + \rho))\gamma$$

Para el jugador 2:

$$f_2 = 25 + \Psi\theta + (n - \Psi)\alpha + \rho\delta + (T - (n + \rho))\gamma + 0{,}3$$

Primeramente, obtenemos la siguiente tabla la cual muestra la relación de las funciones contadoras de los jugadores

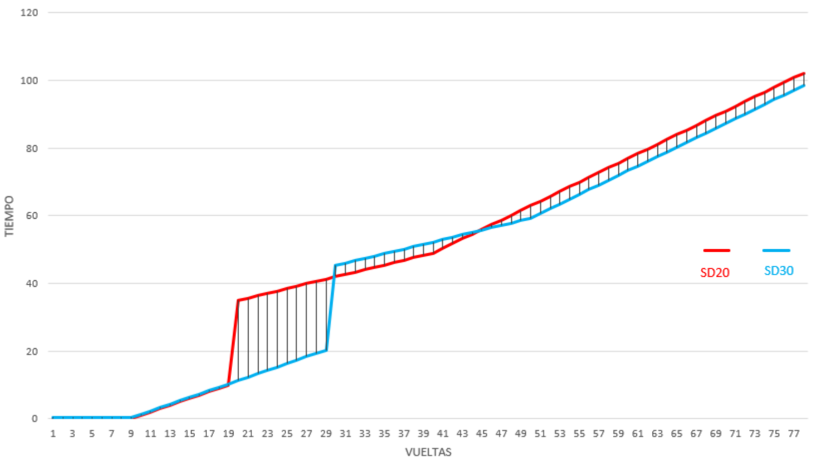
Jugador 1 \ Jugador 2	SD20	SD30	DS50	DS60
SD20	(102.2 , 102.5)	(102.2 , 98.5)	(102.2 , 99.3)	(102.2 , 103.3)
SD30	(98.2 , 102.5)	(98.2 , 98.5)	(98.2 , 99.3)	(98.2 , 103.3)
DS50	(99 , 102.5)	(99 , 98.5)	(99 , 99.3)	(99 , 103.3)
DS60	(103 , 102.5)	(103 , 98.5)	(103 , 99.3)	(103 , 103.3)

Cuadro: Relación de las funciones contadoras de los jugadores.

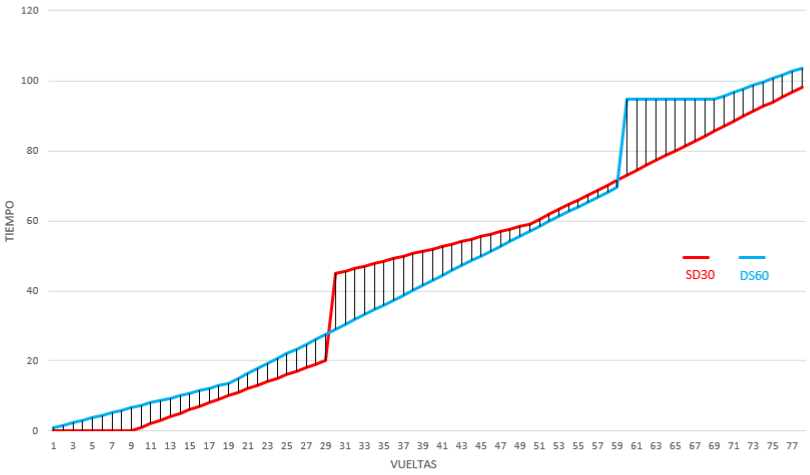
De aquí se deduce la matriz de pagos de nuestro juego, la cual estará dada por

$$V = \begin{array}{c} \\ SD20 \\ SD30 \\ DS50 \\ DS60 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} SD20 & SD30 & DS50 & DS60 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & -3{,}7 & -2{,}9 & 1{,}1 \\ 4{,}3 & 0{,}3 & 1{,}1 & 5{,}1 \\ 3{,}5 & -0{,}5 & 0{,}3 & 4{,}3 \\ -0{,}5 & -5{,}1 & -4{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array}$$

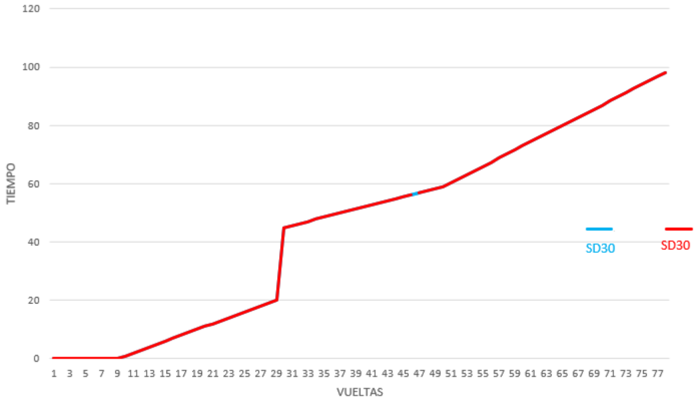
Comparación de Estrategias



Comparación de Estrategias



Comparación de Estrategias



Equilibrio de Nash.

Afirmamos que $(SD30, SD30)$ es un EN, en efecto, por la proposición 1 basta ver que $(SD30, SD30)$ es un punto silla de $v(a,b) = v_1(a,b) = -v_2(a,b)$, para ello note que

$$v_1(SD20, SD30) = -3{,}7 \leq 0{,}3 = v_1(SD30, SD30)$$

$$v_1(DS50, SD30) = 0{,}5 \leq 0{,}3 = v_1(SD30, SD30)$$

$$v_1(DS60, SD30) = -5{,}7 \leq 0{,}3 = v_1(SD30, SD30)$$

También

$$v_1(SD30, SD30) = 0{,}3 \leq 4{,}3 = v_1(SD30, SD20)$$

$$v_1(SD30, SD30) = 0{,}3 \leq 1{,}1 = v_1(SD30, DS50)$$

$$v_1(SD30, SD30) = 0{,}3 \leq 5{,}1 = v_1(SD30, DS60)$$

Así pues, de lo anterior se tiene lo afirmado.

Podemos notar que en el ejemplo anterior los EN coinciden con los valores donde las funciones contadoras alcanzan su mínimo, esto no es una casualidad, tenemos:

Caracterización de los Equilibrios de Nash

Sea G el juego definido anteriormente, entonces $f_1(a^*) \leq f_1(a)$, $\forall a \in A_1$ y $f_2(b^*) \leq f_2(b)$, $\forall b \in A_2$ si y sólo si (a^*, b^*) es un EN para G.

Existencia de Equilibrios de Nash

Sea G el juego definido anteriormente, entonces G tiene al menos un Equilibrio de Nash.

Demostración.-

Por el resultado anterior, basta encontrar $a^* \in A_1$, $b^* \in A_2$ tales que $f_1(a^*) \leq f_1(a), \forall a \in A_1$ y $f_2(b^*) \leq f_2(b), \forall b \in A_2$, pero esto se sigue inmediatamente de notar que $Im(f_i)$ es finita, para $i = 1, 2$, luego existe $c_i \in Im(f_i)$ tal que $c_i \leq l_i$, $\forall$ $l_i \in Im(f_i)$, de donde se deduce rápidamente lo que queriamos $\square$.

Generalizaciones (más paradas en pits)

Considerando dos paradas en pits podemos definir:

$$G = (\{1,2\}, A, \{u_1, u_2\})$$

Donde

$$A = A_1 \times A_2$$

Con

$$A_i = B \times C \times D, i = 1,2$$

y

$B = \{SMD, MDS, SMS, \dots\}$
$C = \{1, \dots, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor\}$
$D = \{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor + 1, \dots, T\}$, $T =$ Total de vueltas del circuito.

$$u_i = \begin{cases} -\,|g_i - g_j| & \text{si } g_i > g_j \\ |g_i - g_j| & \text{si } g_j > g_i \\ 0 & \text{si } g_i = g_j \end{cases} \quad \text{,i=1,2}$$

Las funciones g_k se pueden definir a partir de las funciones f_k de la primer construcción.

Generalizaciones

- Clima (Estrategias mixtas)
- Coche de seguridad (Estrategias mixtas)
- Error en pits
- Caso dinámico

Degradación de los neumáticos - Uso de combustible.

En (12) se propone la **función de desgaste de neumático en la vuelta** n

$$D_n(n, f_n) := d_{t_n}(1+\chi)^{f_n/F}$$

Donde:

n :=número de vuelta.

f_n := nivel de combustible en la $n-$ésima vuelta.

d_{t_n} := factor de desgaste del neumático elegido en la $n-$ésima vuelta ($d_{suaves} > d_{medios} > d_{duros}$).

χ := desgaste adicional de los neumáticos a medida que el coche tiene más combustible.

F :=capacidad del depósito de combustible.

Degradación de los neumáticos - Uso de combustible.

Definiendo

$$D := \sum_{n=1}^{T} D_n(l_n, f_n)$$

Es posible realizar modificaciones a las funciones contadoras (mediante “pedazos” de D) para considerar tambien el uso de combustible.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN

1.- R. GIBBONS, *Game theory for applied economists*. Princeton, N.J. :Princeton University Press, 1958.

2.- F.M. GRÉGOIRE, *The Definitive Guide for Formula 1*, 2018.

3.- A. HAURIE, J.B. KRAWCZYK Y G. ZACCOUR, *Games and dynamic games*. World Scientific, Singapore, 2012.

4.- A. FILATOV, *F1 Strategy: Optimization, Probability, and Game Theory*, 2022.

5.- KEBERZ ENGINEERING, *Overtaking in Formula 1, the 2022 season udpate*, 2022. URL.: https://www.keberz.com/post/overtaking-in-formula-1-the-2022-season-update

Referencias

6.- W.J. WEST Y D. J. N. LIMEBEER, *Optimal Tyre Management of a Formula One car,* IFAC-Papers OnLine, Volume 53, Issue 2, 2020, pp. 14456-14461, ISSN 2405-8963.

7.- M. MITRE BÁEZ, *Generalizaciones del Teorema Minimax y Equilibrios en Juegos de Suma Cero*, pp 1-4, 2014.

8.- I. FERNÁNDEZ ISASI, *Juegos de suma cero. Teoremas de Von Neumann, Sion y Kneser-Fan*, pp 19-33, 2016.

9.- J.WITTLE, *The Game Theory of Formula 1: Winning the Monaco Grand Prix*, 2012.

10.- M.M. CRUDELE, G. DEL FIUME Y A. MARCOMINI, *Formula 1 Grand Prix Simulator: a Dynamic Game Theory Approach*.

11.- CONTRERAS L., *Teoría de juegos en la Fórmula 1*, 2023.

12.- O. CARRASCO Y CH. THRAVES , *On the Optimization of Pit-Stop Strategies via Dynamic Programming*, 2021.