Criterio de Controlabilidad para sistemas bilineales en el plano

Yamilet Keyla Lipa Mamani

2026

1. Resumen

El estudio de la teoría de control se inició desde finales del siglo XIX con James Maxwell (1868), quien analizó la estabilidad de reguladores centrífugos, dispositivos utilizados para mantener la velocidad constante en máquinas de vapor, en 1876 Edward Routh y más tarde Adolf Hurwitz (1895) desarrollaron criterios matemáticos para determinar la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales, lo cual es una base crucial para la Teoría de Control moderno.

Sin embargo a principios y mediados del siglo XX las bases matemáticas se consolidaron aún más, haciendo mención de lo más destacado por los años 1940: Durante la Segunda Guerra Mundial, la Teoría de Control experimentó un avance significativo debido a la necesidad de diseñar sistemas automáticos, como controladores de vuelo y sistemas de artillería. Norbert Wiener, con su trabajo en cibernética, y Rudolf Kalman, con la introducción del Filtro de Kalman en los años 1960, jugaron roles fundamentales en el desarrollo de la Teoría de Control moderna y posteriormente por los años 1950-1960: Se formalizó el campo de los Sistemas de Control Óptimo y la Teoría de Control No Lineal, mientras se extendía el uso de herramientas computacionales.

Considerando un aspecto más general de la Teoría de Control, sea la función $f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ que depende de tres parámetros, t, x y u llamados tiempo, estado y control respectivamente, con $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u) & ; t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, con $t \in [0, +\infty)$ el cual recibe el nombre de "SISTEMA DE CONTROL"donde aparece el parámetro u. $\mathbb{R}^n$ es llamado el espacio de estados. El control $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ se considera de modo general dentro el espacio: $\mathcal{U} = \{u : [0, +\infty) \to \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^m / \mathrm{u\ es\ medible}\}$; llamado el espacio de controles admisibles, el cual puede ser acotado o no acotado. La solución del sistema de control se denota por:

$$x(t) = \varphi(t, u(t), x_0)$$

El objetivo del estudio de Sistemas de Control radica en: dados dos estados cualesquiera x_1 y x_2 existirá algún control u y un tiempo $t > 0$ tal que $\varphi(t, u(t), x_1) = x_2$, en este caso se dice que el sistema de control es completamente controlable en el espacio de estados.

En el estudio de sistemas de control general podemos encontrar dos tipos de sistemas, los sistemas lineales y los sistemas no lineales. Para Sistemas de Control Lineales, existen diversas técnicas de solución, entre ellas el criterio más general que permite determinar la controlabilidad completa de un Sistema de Control Lineal es conocido como el Criterio de la Condición de Rango de Kalman, que afirma: si el rango de la matriz de controlabilidad coincide con la dimensión del espacio de estados, el sistema es completamente controlable si el espacio de control es no acotado. Para Sistemas de Control No Lineales, la Condición de Rango de Kalman, no es una condición suficiente para obtener controlabilidad completa, simplemente es una condición necesaria, por lo cual es necesario realizar otro tipo de análisis que nos permitan determinar la controlabilidad o no de un Sistema de Control No Lineal. Muchos matemáticos se han dedicado a un Sistema de Control No Lineal muy particular, llamados Sistemas de Control Bilineales o simplemente Sistemas Bilineales, en la literatura existen diversas técnicas para determinar la controlabilidad de estos sistemas bilineales, entre los cuales se puede mencionar en Geometría Diferencial, acciones de grupos transitivos, en Álgebra Lineal, se encuentra el trabajo de Elliot, y en sistemas dinámicos se encuentra el Criterio de Controlabilidad de Colonius-Kliemann que consiste en la descomposición del sistema bilineal en dos subsistemas, un sistema angular sobre una esfera y un sistema radial sobre los reales.

La siguiente presentación está organizada de la siguiente manera:

En la primera sección, comenzamos con algunos preliminares y describimos el sistema de control bilineal en el plano. Iniciamos enunciando el Criterio de Colonius-Klieman del cual analizaremos la condición de rango de las álgebras de Lie (LARC) y determinaremos cuando el sistema bilineal cumple LARC mediante el teorema 1.1. .

En la segunda sección, estudiaremos la controlabilidad del sistema angular $\mathbb{P}\Sigma$ sobre $\mathbb{P}^1$ comenzando por establecer el sistema angular de un sistema bilineal. Luego mediante operaciones y cambios de variables apropiados establecemos una integral a resolver, la que estudiaremos los diferentes casos de posibles soluciones, buscando que alguna de estas soluciones barra todos los reales

En la tercera sección, Finalmente, estudiaremos bajo que condiciones se tiene que $0 \in int(\Sigma_{\mathcal{L}})$, comenzando con la comprensión de los exponentes de Lyapunov y el espectro de Lyapunov que nos define Colonius-Klieman en [**?**], considerando un conjunto Σ_{Re} que será más .ªccesible ", y entonces se pueda estudiar bajo que condiciones sucede que $0 \in int(\Sigma_{\mathcal{L}})$.

De este modo, enunciaremos un criterio de controlabilidad para sistemas bilineales en el plano, bajo las condiciones trabajadas en la segunda y tercera sección. estas condiciones mencionadas son obtenidas de las condiciones del criterio de Colonius Klieman.